

# ДОВІДНИК З ОСНОВНИМИ ФОРМУЛАМИ МАТЕМАТИКИ

## 1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА РІВНЯННЯ

### А. Формули скороченого множення

1.  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
3.  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$
4.  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

### Б. Степені та корені

5.  $a^k * a^n = a^{k+n}$
6.  $a^k \div a^n = a^{k-n}$
7.  $a^0 = 1, a \neq 0$
8.  $(a^k)^n = a^{kn}$
9.  $(ab)^n = a^n b^n$
10.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0$
11.  $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n, a \neq 0, b \neq 0$
12.  $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}, a > 0$
13.  $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
14.  $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$
15.  $\sqrt{x^2} = |x|$

### В. Лінійні рівняння $ax = b$

Якщо  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{b}{a}$ ; якщо  $a = b = 0$ , то  $x$  – будь-яке число;  
якщо  $a = 0, a b \neq 0$ , то розв'язків немає ( $\emptyset$ ).

### Г. Квадратні рівняння $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

- 1) Якщо  $D > 0$  – 2розв'язки
- 2) Якщо  $D = 0$  – 1розв'язок ( $x = -\frac{b}{2a}$ )
- 3) Якщо  $D < 0$  –розв'язків немає

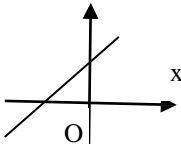

Д. Розкладання квадратного тричлена на множники:

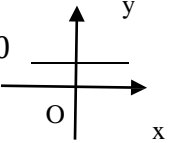
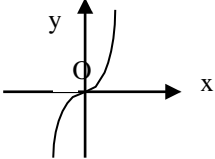
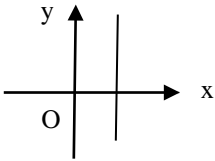
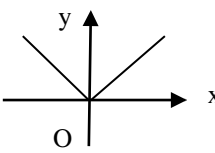
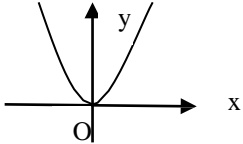
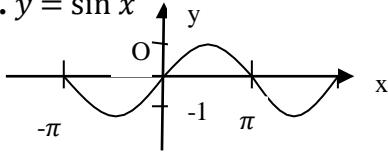
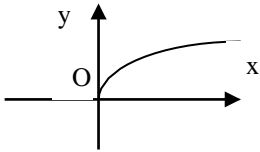
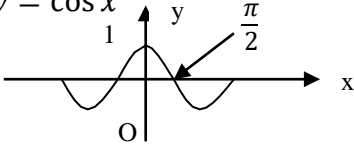
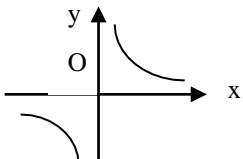
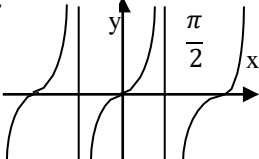
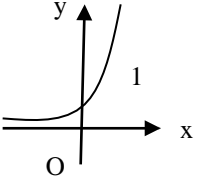
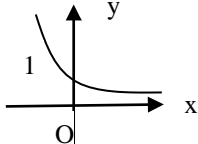
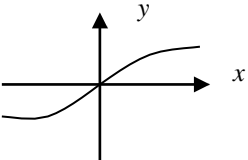
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

## 2. ПРОГРЕСІЇ

Формули	А. Арифметична прогресія $a_1, a_2, \dots, a_n$	Б. Геометрична прогресія $b_1, b_2, \dots, b_n, q \neq 0$
Формула $n$ -го члена прогресії	<b>1.</b> $a_n = a_1 + d(n - 1)$	<b>1.</b> $b_n = b_1 * q^{n-1}$
Характеристична властивість прогресії	<b>2.</b> $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	<b>2.</b> $b_k = \pm \sqrt{b_{k-1} * b_{k+1}}$
Сума $n$ перших членів прогресії	<b>3.</b> $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n,$ або <b>4.</b> $S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} * n$	<b>3.</b> $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q},$ або <b>4.</b> $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$
Сума нескінченної спадної геометричної прогресії		<b>5.</b> $S = \frac{b_1}{1 - q}$

## 3. ГРАФІКИ

<b>1.</b> $y = kx + b$ а) $k > 0$ $b > 0$		<b>6.</b> $y = \log_a x$ а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$	
---	---	--	--

<p>6) <math>y = b</math></p> <p><math>b &gt; 0</math></p> <p><math>k = 0</math></p> 	<p>7. <math>y = x^3</math></p> 
<p>В) <math>x = a</math></p> <p><math>a &gt; 0</math></p> 	<p>8. <math>y =  x </math></p> 
<p>2. <math>y = ax^2</math></p> <p><math>a &gt; 0</math></p> 	<p>9. <math>y = \sin x</math></p> 
<p>3. <math>y = \sqrt{x}</math>,</p> <p><math>x \geq 0</math></p> 	<p>10. <math>y = \cos x</math></p> 
<p>4. <math>y = \frac{k}{x}</math></p> <p><math>k &gt; 0</math></p> 	<p>11. <math>y = \operatorname{tg} x</math></p> 
<p>5. <math>y = a^x</math></p> <p>a) <math>a &gt; 1</math></p>  <p>б) <math>0 &lt; a &lt; 1</math></p> 	<p>12. <math>y = \sqrt[3]{x}</math></p> 

## 4. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

А. 1.  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2.  $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

3.  $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ ,  $\alpha \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

4.  $\operatorname{tg}\alpha * \operatorname{ctg}\alpha = 1$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Б. 1.  $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

2.  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

3.  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

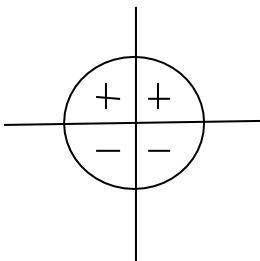
В. 1.  $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

2.  $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

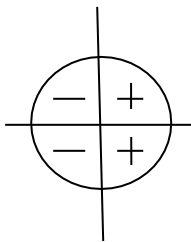
3.  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

## 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

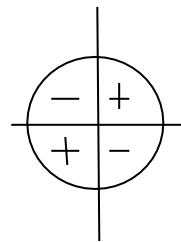
А. Знаки тригонометричних функцій



$\sin x$



$\cos x$



$\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$

Б. Правила вираження тригонометричних функцій кутів  $\pi k \pm \alpha$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , через тригонометричні функції кута  $\alpha$ .

При відхиленні кута  $\alpha$  від вертикалі ( $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  або  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ ) функція змінюється на кофункцію ( $\sin$  на  $\cos$ ,  $tg$  на  $ctg$  і навпаки)  
 При відхиленні кута від горизонталі ( $\pi \pm \alpha$  або  $2\pi \pm \alpha$ ) функція не змінюється. Перед наведеною функцією ставиться знак чверті вихідної функції.

Наприклад,  $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$ ;  $\sin(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = -\cos \alpha$ ;

$$tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -ctg\alpha; ctg(2\pi - \alpha) = -ctg\alpha.$$

### В. Періодичність.

Для функцій  $y = \sin x$  і  $y = \cos x$  найменший додатний період  $T = 2\pi$ ; для функцій  $y = tg x$  і  $y = ctg x$ ,  $T = \pi$ .

### Г. Парність.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad tg(-\alpha) = -tg\alpha, \\ ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

### Д. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

$\alpha$ , град	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\alpha$ , рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$tg \alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0
$ctg \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Зауваження.  $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ ;  $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ .

## 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

### А. Значення арксинуса й арккосинуса деяких чисел

$a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

**Б.**  $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ .

**В.**  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ ,  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ .

$-1 \leq a \leq 1$	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
<b>Г.</b> Розв'язання рівнянь виду $\cos x = a$			
$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ , $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$ , $l \in Z$	$x = 2\pi n$ , $n \in Z$	$x = \pi + 2\pi k$ , $k \in Z$
<b>Д.</b> Розв'язання рівнянь виду $\sin x = a$			
$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ , $k \in Z$	$x = \pi l$ , $l \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , $k \in Z$

**Е.** Значення арктангенса й арккотангенса деяких чисел

$a$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\arctg a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\text{arcctg } a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

**Ж.**  $\text{arcctg } a + \arctg a = \frac{\pi}{2}$

**З.**  $\text{arcctg } (-a) = \pi - \text{arcctg } a$ ,  $\arctg (-a) = -\arctg a$ .

**И.** Розв'язання рівнянь виду  $\text{tg } x = a$ ,  $a \in R$ :  $x = \arctg a + \pi k$ ,  $k \in Z$

**К.** Розв'язання рівнянь виду  $\text{ctg } x = a$ ,  $a \in R$ :  $x = \text{arcctg } a + \pi n$ ,  $n \in Z$ .

#### 4. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. БІНОМ НЬЮТОНА.

<b>А.</b> Розміщення (не всі елементи, важливий поряд- док)	<b>1.</b> $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$	<b>2.</b> $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
<b>Б.</b> Перестановки (використову- ються всі елеме- нти)	<b>1.</b> $P_n = n!, n! = 1 * 2 * 3 \dots * n$	
<b>В.</b> Комбінації (не всі елементи, порядок не важ- ливий)	<b>1.</b> $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$	<b>2.</b> $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

#### Г. Властивості комбінацій

А)  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , Б)  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ , В)  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .

#### Д. Біном Ньютонa

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n,$$

де  $k+1$  – елемент розкладання  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ .

#### 5. ЛОГАРИФМИ

##### А. Означення

1. *Логарифмом*  $\log_a b = c$  називається таке число  $c$ , що  $a^c = b$ , де  $b > 0, a > 0; a \neq 1$ .

2. *Десятковим логарифмом* називається логарифм, основа якого дорівнює 10.

$$\log_{10} b = \lg b$$

3. *Натуральним логарифмом* називається логарифм, основа якого дорівнює  $e$ .

$$\log_e b = \ln b$$

##### Б. Властивості

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0.$$

1.  $a^{\log_a b} = b$  – основна  
тотожність

2.  $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

3.  $n \log_a b = \log_a b^n$

$$4. \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$5. \log_a a = 1$$

$$6. \log_a \frac{1}{a} = \log_a a^{-1} = -1$$

$$7. \log_a 1 = 0$$

$$8. \log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

$$6. \log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b$$

$$7. \log_a b * \log_b a = 1$$

$$11. \log_n \sqrt[n]{b} = \log_a b^{-1/a}$$

$$12. \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

## 9. ТРИКУТНИКИ

### А. Прямокутний трикутник

$$1. a^2 + b^2 = c^2$$

$$6. \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$11. S = \frac{ab}{2}$$

$$2. a^2 = c * a_c$$

$$7. \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$12. S = \frac{ch}{2}$$

$$3. b^2 = c * b_c$$

$$8. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

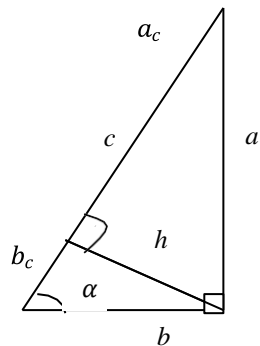
$$13. h = \frac{ab}{c}$$

$$4. h^2 = a_c * b_c$$

$$9. r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$5. \sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$10. R = \frac{c}{2}$$



### Б. Рівносторонній трикутник

$$1. h = R + r$$

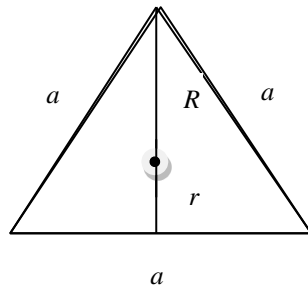
$$4. a = 2r\sqrt{3}$$

$$2. R = 2r$$

$$5. h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$3. a = R\sqrt{3}$$

$$6. S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$





## В. Різнобічний трикутник

$$1. S = \frac{ab \sin \gamma}{2}, S = \frac{bc \sin \alpha}{2}; S = \frac{ac \sin \beta}{2}$$

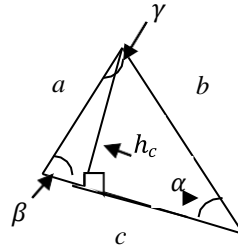
$$2. S = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$3. S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p},$$

$$\text{де } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$4. S = \frac{abc}{4R}, R = \frac{abc}{4S}$$

$$5. S = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2}; r = \frac{S}{p}$$



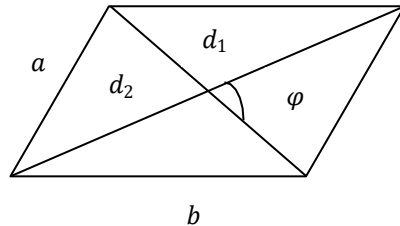
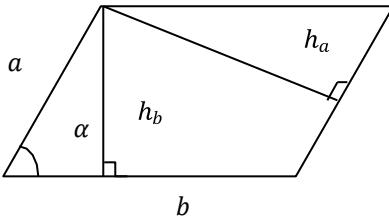
## Г. Теорема синусів і косинусів

$$1. \text{ Теорема синусів: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, a = 2R \sin \alpha$$

$$2. \text{ Теорема косинусів: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

## 10. ЧОТИРИКУТНИКИ

### А. Паралелограм



$$1. S = bh; S = ah_a$$

$$2. S = ab \sin \alpha$$

$$3. S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$$

$$4. 2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$$

## Б. Ромб

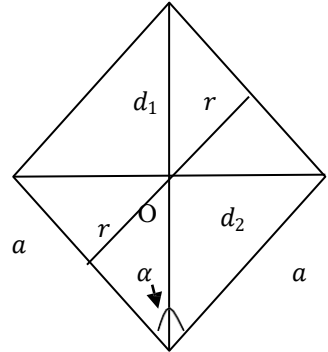
1.  $S = ah; S = 2ar$

2.  $S = a^2 \sin \alpha$

3.  $S = \frac{d_1 d_2}{2} r = \frac{S}{2a}$

4.  $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

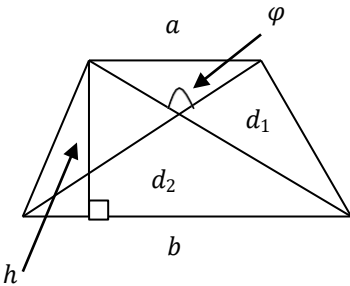
5.  $r = \frac{d_1}{2} * \sin \frac{\alpha}{2}$



## В. Трапеція

1.  $S = \frac{a+b}{2} * h$

2.  $S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$

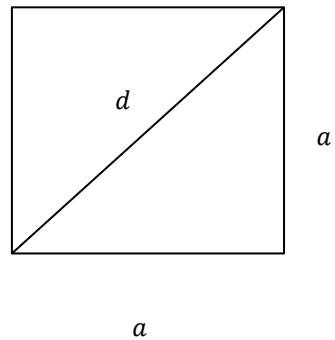


## Г. Квадрат

1.  $d = a\sqrt{2}$

2.  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; r = \frac{a}{2}$

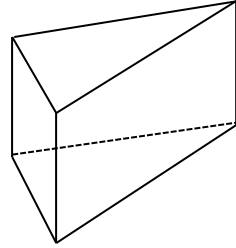
3.  $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$



## 11. СТЕРЕОМЕТРІЯ

### А. Призма

$$V = S_{0\text{сн}} * H, \quad S = S_{\text{бічн}} + 2S_{0\text{сн}}$$



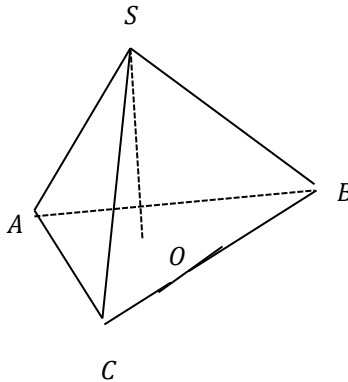
### Б. Піраміда

$$V = \frac{1}{3} S_{0\text{сн}} * H$$

$$S = S_{\text{бічн}} + S_{0\text{сн}}$$

Зрізана піраміда:

$$V = \frac{H}{3} (S_2 + \sqrt{S_2 S_1} + S_1)$$



### В. Конус

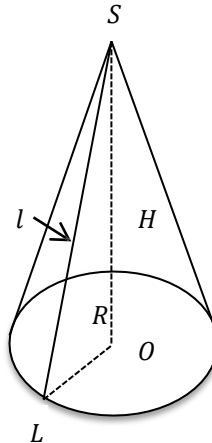
$$S_{\text{бічн}} = \pi Rl$$

$$S = \pi Rl + \pi R^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Зрізаний конус:

$$V = \frac{\pi H}{3} * (R^2 + Rr + r^2)$$

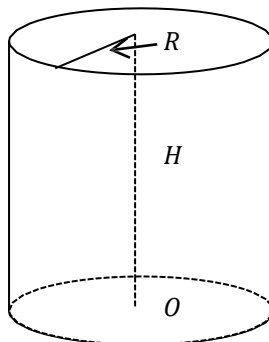


Г. Циліндр

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi HR$$

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

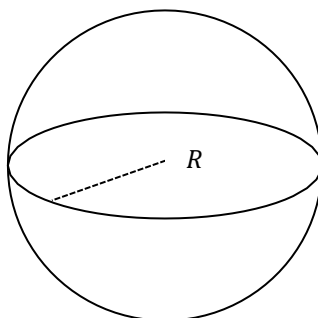
$$V = \pi R^2 H$$



Д. Куля

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Автор:

Викладач :

Гамкало Леся Степанівна

Комп'ютерна обробка  
Гардаш Анатолій Степанович